Proceedings of IAM, V.3, N.2, 2014, pp.212-234

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА*

М.А. Садыгов[1]

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: misreddin08@rambler.ru

Резюме. В работе используя классы $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,o(\beta))$ локально липшицевых функций в точке, в банаховым пространстве получены достаточные условия экстремума высокого порядка при наличии ограничений.

Ключевые слова: конус, достаточное условие, локально липшицевая функция, локальный минимум, банахово пространство.

AMS Subject Classification: 05C35, 52A20.

1. Введение

В работе используя классы $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,o(\beta))$ локально липшицевых функций в точке, в банаховым пространстве получены достаточные условия экстремума высокого порядка при наличии ограничений.

В работе Кларка (см.[2]) для экстремальных задач, при наличии ограничений, с использованием функции расстояния в классах липшицевых функций построена функция точного штрафа.

В [6,7,9] в банаховом пространстве определены $(\alpha,\beta,\nu,\delta)$, $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta)$ липшицевые и $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta)$ локально липшицевые функции в точке, изучен ряд их свойств и рассмотрены экстремальные задачи с ограничениями.

В [1,7] получены достаточные условия экстремума высокого порядка при наличии ограничений. Работа является продолжением работы [5,8] автора.

В гладком случае достаточные условия экстремума для экстремальных задач с ограничениями изучены многими авторами(см. например, [3,10,11]).

2. $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,o(\beta))$ локально липшицевая функция

Пусть X - банахово пространство, $\alpha>0$, $\nu>0$, $\beta\ge\alpha\nu$, $\delta>0$ и $R_+=[0,+\infty)$. Положим $d(x,y)=\|x-y\|$ и $B=\{x\in X:\|x\|\le 1\}$.

Непустое множество $K\subset X$ называется конусом, если $\lambda x\in K$ при всех $x\in K$, $\lambda\ge 0$. Пусть $K\subset X$ выпуклый конус, $f:\{x_0+K\}\to R$ и $\varphi:K\to R$, где $\varphi(0)=0$.

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 25.11.2014

Функцию f назовем $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,o(\beta))$ (или сильно $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta)$, см.[5]) локально липши-цевой относительно конуса K с постоянной L в точке x_0, если существует функция $o:R_+\to R_+$, где $o(0)=0$ и $\lim\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{o(t)}{t}=0$ такая, что f удовлетворяет условию

$$\left|f(x_0+x+y)-f(x_0+x)-\varphi(x+y)+\varphi(x)\right|\le L\|y\|^{\nu}(\|x\|^{\beta-\alpha\nu}+\|y\|^{\frac{\beta-\alpha\nu}{\alpha}})+o(\|x\|^{\beta})$$

при $x,y\in K$, $\|x\|\le\delta, \|y\|\le\delta$. Если $\varphi(x)\equiv 0$, то функцию f назовем $(\alpha,\beta,\nu,\delta,o(\beta))$ локально липшицевой относительно конуса K с постоянной L в точке x_0.

Если $K=X$, то функцию f назовем $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,o(\beta))$ локально липшицевой с постоянной L в точке x_0, а если $\varphi=0$, то функцию f назовем $(\alpha,\beta,\nu,\delta,o(\beta))$ локально липшицевой с постоянной L в точке x_0 (см.[6]).

Замечание 1. Если $\beta=\alpha\nu$, то считаем, что $\|x\|^{\beta-\alpha\nu}+\|y\|^{\frac{\beta-\alpha\nu}{\alpha}}=1$.

Если существует функция $o:R_+\to R_+$, где $o(0)=0$ и $\lim\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{o(t)}{t}=0$, такая, что f удовлетворяет условию $\left|f(x_0+x+y)-f(x_0+x)\right|\le L\|y\|^{\nu}+o(\|x\|^{\nu})$ при $x,y\in K$, $\|x\|\le\delta$, $\|y\|\le\delta$, то f назовем $(1,\nu,\nu,\delta,o(\nu))$ локально липшицевой относительно конуса K с постоянной L в точке x_0. Если $K=X$, то f назовем $(1,\nu,\nu,\delta,o(\nu))$ локально липшицевой с постоянной L в точке x_0.

Пусть $K\subset X$ конус. Если $f:\{x_0+K\}\to R$ и $\varphi:K\to R$, где $\varphi(0)=0$, то положим

$$f_{\varphi}^{\{\beta\}-}(x_0;x)=\varliminf_{t\downarrow 0}\frac{1}{t^{\beta}}(f(x_0+tx)-f(x_0)-\varphi(tx))=$$
$$=\sup_{\delta>0}\inf_{0<t\le\delta}\frac{1}{t^{\beta}}(f(x_0+tx)-f(x_0)-\varphi(tx))$$

при $x\in K$.

3. О достаточных условиях слабого минимума в банаховом пространстве при наличии ограничений

Пусть X банахово пространство и $\{E_\alpha:\alpha\in A\}$ есть семейство конечномерных подпрос-транств пространства X направленное по возрастанию и удовлетворяющее условию $\bigcup\limits_{\alpha\in A}E_\alpha=X$, где $E_\alpha\ne E_\beta$ при $\alpha\ne\beta$, A-множество индексов, направленное (рефлексивным, транзитивным, антисимметричным) отношением $\le$. Отметим, что A направлено по возрастанию $\alpha \le \beta$, если $E_\alpha \subset E_\beta$. Так как всякая линейная система обладает алгебраическим базисом, то существование данного семейства конечномерных подпространств E_α, $\alpha \in A$, в X следует из леммы Цорна. Ясно, что E_α, $\alpha \in A$, банахово пространство относительно индуцированной топологии из банахова пространства X.

Пусть g_α обозначает каноническое вложение E_α в X. Известно, что (см.[12]) индуктивная топология в X относительно семейства $(E_\alpha, g_\alpha, \ \alpha \in A)$ является локальным выпуклым пространством. Через $(X)_s$ будем обозначать пространство X, снабженное введенной топологией. Аналогично из 2.6.4 и 2.6.5[12] имеем, что $\{x_k\} \subset X$ сходится к x относительно топологии в $(X)_s$ в том и только в том случае, когда для некоторого $\alpha \in A$ последовательность $\{x_k\}$ сходится к x в E_α. Поэтому топология в $(X)_s$ сильнее, чем топология в X. Тогда имеем, что $(X)_s$ хаусдорфовое пространство.

Положим $T(x_0;C) = \{x \in X : \exists x_k \to x, \ \exists t_k \downarrow 0, \text{что} \ x_0 + t_k x_k \in C\}$,

$$T_s(x_0;C) = \{x \in X : \exists x_k \to x \text{ в } (X)_s, \ \exists t_k \downarrow 0, \text{что } x_0 + t_k x_k \in C\}.$$

Ясно, что $T(x_0;C) \supset T_s(x_0;C)$. Положим $C_\alpha = x_0 + (C - x_0) \bigcap E_\alpha = C \bigcap (x_0 + E_\alpha)$, где $\alpha \in A$. Так как $C_\alpha \subset C$, то имеем, что $T(x_0;C_\alpha) = T_s(x_0;C_\alpha) \subset T_s(x_0;C)$.

Если x_0 является точкой локального минимума функции f на множестве $C \subset X$, то существует $\delta > 0$ такое, что $f(x_0) \le f(x)$ при $x \in C \bigcap (x_0 + \delta B)$. Отсюда имеем, что $f(x_0) \le f(x)$ при $x \in C \bigcap (x_0 + \delta B \bigcap E_\alpha)$ и $\alpha \in A$. Отметим, что $\delta B \bigcap E_\alpha$ выпуклая закругленная окрестность нуля в E_α (см.[11]).

Если $f(x_0) \le f(x)$ при $x \in C \bigcap (x_0 + \delta B \bigcap E_\alpha)$ и $\alpha \in A$, то имеем, что $f(x_0) \le f(x)$ при $x \in C \bigcap (x_0 + \delta B)$, где $\delta > 0$.

Если x_0 является локального минимума функции f на множестве $C \bigcap (x_0 + E_\alpha)$ при $\alpha \in A$, то x_0 назовем слабого локального минимума функции f на множестве C.

Отметим, что если x_0 является локального минимума функции f на множестве C, то $x_0 \in C$ является точкой слабого локального минимума функции f на множестве C. В общем случае обратное утверждение неверно.

Замечание 2. Если существуют $\delta > 0$ и $\alpha \in A$ такое, что $f(x_0) \le f(x)$ при $x \in C \bigcap (x_0 + \delta B \bigcap E_\alpha)$, то x_0 называется точкой локального минимума функции f на множестве C относительно топологии $(X)_s$.

Если $x_0 \in C$, то положим $C_\alpha = C \bigcap (x_0 + E_\alpha)$ при $\alpha \in A$ и

$$T(x_0; C_\alpha) = \left\{ x \in E_\alpha : \exists x_k \to x \text{ в } E_\alpha, \exists t_k \downarrow 0, \text{ что } x_0 + t_k x_k \in C_\alpha \right\}.$$

Лемма 1. $\bigcup\limits_{\alpha \in A} T(x_0; C_\alpha) = T_s(x_0; C)$.

Доказательство. Если $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} T(x_0; C_\alpha)$, то существует индекс $\overline{\alpha} \in A$ такое, что $x \in T(x_0; C_{\overline{\alpha}})$. Поэтому существуют $x_k \in E_{\overline{\alpha}}$, где $x_k \to x$ в $E_{\overline{\alpha}}$ и $t_k \downarrow 0$ такие, что $x_0 + t_k x_k \in C_{\overline{\alpha}}$. Отсюда вытекает, что $x \in T_s(x_0; C)$. Обратно, если $x \in T_s(x_0; C)$, то существуют $x_k \in X$, где $x_k \to x$ в $(X)_s$ и $t_k \downarrow 0$ такие, что $x_0 + t_k x_k \in C$. По лемме 2.6.5[11] $x_k \to x$ в $(X)_s$ тогда и только тогда, когда существует индекс $\overline{\alpha} \in A$ такое, что $x_k \in E_{\overline{\alpha}}$ и $x_k \to x$ в $E_{\overline{\alpha}}$. Отсюда имеем, что $x \in E_{\overline{\alpha}}$ и $x_0 + t_k x_k \in x_0 + E_{\overline{\alpha}}$. Так как $x_0 + t_k x_k \in C$, то $x_0 + t_k x_k \in C_{\overline{\alpha}}$, т.е. $x \in T(x_0; C_{\overline{\alpha}})$. Лемма доказана.

Пусть $C \subset X$, $x_0 \in C$, $f : X \to R$. Далее считаем, что $o : R_+ \to R_+$, $\overline{o} : R_+ \to R_+$, $o_i : R_+ \to R_+$ и $\overline{o}_i : R_+ \to R_+$, где $o(0) = \overline{o}(0) = o_i(0) = \overline{o}_i(0) = 0$ и $\lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$, $\lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{\overline{o}(t)}{t} = 0$, $\lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{o_i(t)}{t} = 0$, $\lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{\overline{o}_i(t)}{t} = 0$.

Если x_0 изолированная точка множества C, то доказательства следующих утверждений три-виально. Поэтому далее считаем, что точка строгого слабого локального минимума x_0 не является изолированной точкой.

Теорема 1. Пусть $C \subset X$, $x_0 \in C$, функция f удовлетворяет $\varphi_i - (1, \beta_i, \nu_i, \delta, o_i(\beta_i))$ локально липшицеву условию с постоянной L_i в точке x_0, существует число $\alpha > 0$ такое, что $\varphi_i(x) \ge 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, при $x \in (C - x_0) \bigcap \alpha B$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \{x \in T_s(x_0; C) : f_{\varphi_i}^{\{\beta_i\}-}(x_0; x) > 0\} = T_s(x_0; C) \setminus \{0\}$. Тогда $x_0 \in C$ является точкой строгого слабого локального минимума функции f на множестве C.

Доказательство. Допустим противное. Тогда существует индекс $\tau_0 \in A$ такое, что точка x_0 не является строгого локального минимума функции f на множество C_{τ_0}. Поэтому для любого $\delta_k > 0$ найдется $y_k \ne 0$ такое, что

$x_0+y_k\in C_{\tau_0}$, $f(x_0+y_k)\le f(x_0)$ и $\|y_k\|\le\delta_k$. Положим $\alpha_k=\|y_k\|$, $x_k=\dfrac{y_k}{\|y_k\|}$. Так как $\|x_k\|=1$, то не умаляя общности можно считать, что $x_k\to x$, $x\ne 0$. Если $\alpha_k\downarrow 0$, то имеем, что $x\in T_s(x_0;C_{\tau_0})\subset T_s(x_0;C)$. Обозначим $S_i=\{x\in T_s(x_0;C): f_{\varphi_i}^{\{\beta_i\}-}(x_0;x)>0\}$, $i=\overline{1,n}$. По условию имеем, что $x\in\bigcup_{i=1}^{n}S_i$. Тогда существует m, где $1\le m\le n$, что $x\in S_m$.

Пусть $x\in S_m$. Ясно, что $f(x_0+\alpha_k x)-f(x_0)\le f(x_0+\alpha_k x)-f(x_0+\alpha_k x_k)$.
Если $\delta_k<\min\{\frac{\delta}{2},\alpha\}$, то по условию имеем, что

$$f(x_0+\alpha_k x)-\varphi_m(\alpha_k x)-f(x_0)\le f(x_0+\alpha_k x)-$$
$$-\varphi_m(\alpha_k x)-f(x_0+\alpha_k x_k)+\varphi_m(\alpha_k x_k)\le$$
$$\le\left|f(x_0+\alpha_k x+(\alpha_k x_k-\alpha_k x))+\varphi_m(\alpha_k x)-f(x_0+\alpha_k x)-\varphi_m(\alpha_k x_k)\right|\le$$
$$\le L_m\alpha_k^{\nu_m}\|x_k-x\|^{\nu_m}(\|\alpha_k x\|^{\beta_m-\nu_m}+\|x_k-x\|^{\beta_m-\nu_m}\cdot\alpha_k^{\beta_m-\nu_m})+o_m(\alpha_k^{\beta_m}\|x\|^{\beta_m}).$$

Поэтому

$$f_{\varphi_m}^{\{\beta_m\}-}(x_0;x)\le\underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_k x)-\varphi_m(\alpha_k x)-f(x)}{\alpha_k^{\beta_m}}\le$$
$$\le\underline{\lim}_{k\to\infty}(L_m\|x_k-x\|^{\nu_m}(\|x\|^{\beta_m-\nu_m}+\|x_k-x\|^{\beta_m-\nu_m})+\frac{o_m(\alpha_k^{\beta_m}\|x\|^{\beta_m})}{\alpha_k^{\beta_m}})=0,$$

т.е. $f_{\varphi_m}^{\{\beta_m\}-}(x_0;x)\le 0$. Получим, что $x\notin S_m$. Так как $x\in S_m$, то получим противоречие. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 1 вытекает, что верно следующее следствие.

Следствие 1. Пусть $C\subset X$, $x_0\in C$, функция f удовлетворяет $\varphi_i-(1,\beta_i,\nu_i,\delta,o_i(\beta_i))$ локально липшицеву условию с постоянной L_i в точке x_0, существует число $\alpha>0$ такое, что $\varphi_i(x)\ge 0$, $i=1,2,\ldots,n$, при $x\in(C-x_0)\bigcap\alpha B$ и $\bigcup_{i=1}^{n}\{x\in T(x_0;C_\tau): f_{\varphi_i}^{\{\beta_i\}-}(x_0;x)>0\}=T(x_0;C_\tau)\setminus\{0\}$ при $\tau\in A$. Тогда $x_0\in C$ является точкой строгого слабого локального минимума функции f на множестве C.

Следствие 2. Пусть функция f в точке $x_0\in C$ удовлетворяет $\varphi-(1,\beta,\nu,\delta,o(\beta))$ локально липшицеву условию с постоянной L, существует число $\alpha>0$ такое, что $\varphi(x)\ge 0$ при $x\in(C-x_0)\bigcap\alpha B$ и $f_{\varphi}^{\{\beta\}-}(x_0;x)>0$ при

$x \in T_s(x_0;C)$, $x \neq 0$. Тогда $x_0 \in C$ является точкой строгого слабого локального минимума функции f на множестве C.

Пусть $f_i : X \to R$, $i = 1,\ldots,n$, дифференцируемые по Фреше функции. Положим $I = \{1,\ldots,n\}$, $I_0 = \{i \in I : f_i(x_0) = 0\}$.

Множество

$$K_\tau(x_0) = \{x \in E_\tau : \left\langle f_i'(x_0), x \right\rangle \le 0,\ i \in I_0\}$$

назовем линеаризующим конусом для множества $C_\tau = \{x \in x_0 + E_\tau : f_i(x) \le 0,\ i \in I\}$ в точке $x_0 \in C = \{x \in X : f_i(x) \le 0,\ i \in I\}$ при $\tau \in A$. Если $I_0 = \varnothing$, то считаем, что $K_\tau(x_0) = E_\tau$. Отметим, что $T(x_0;C_\tau) \subset K_\tau(x_0)$.

Следствие 3. Пусть $C = \{x \in X : f_i(x) \le 0,\ i \in I\}$, $x_0 \in C$, функция f удовлетворяет $\varphi_i - (1, \beta_i, \nu_i, \delta, o_i(\beta_i))$ локально липшицеву условию с постоянной L_i в точке x_0, существует число $\alpha > 0$ такое, что $\varphi_i(x) \ge 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, при $x \in (C - x_0) \bigcap \alpha B$ и

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{x \in K_\tau(x_0) : f_{\varphi_i}^{\{\beta_i\}-}(x_0;x) > 0\} = K_\tau(x_0) \setminus \{0\}$$

при $\tau \in A$. Тогда $x_0 \in C$ является точкой строгого слабого локального минимума функции f на множестве C.

Следствие 4. Пусть $x_0 \in C$, функция f удовлетворяет $\varphi_i - (1, i, \nu_i, \delta, o_i(i))$ локально липшицеву условию с постоянной L_i в точке x_0, где $i = 1,\ldots,n$, $\nu_1 = 1$ и $\varphi_1(x) \equiv 0$ при $x \in R^s$,

$\varphi_2(x) = f^{\{1\}-}(x_0;x)$, $\varphi_3(x) = f^{\{1\}-}(x_0;x) + f_{\varphi_2}^{\{2\}-}(x_0;x)$, …,

$\varphi_n(x) = f^{\{1\}-}(x_0;x) + f_{\varphi_2}^{\{2\}-}(x_0;x) + \cdots + \ + f_{\varphi_{n-1}}^{\{n-1\}-}(x_0;x)$

и пусть $M_1 = T_s(x_0, C)$, $M_i = \{x \in M_{i-1} : f_{\varphi_i}^{\{i\}-}(x_0;x) \le 0\}$ при $i = 2,\ldots,n$ и $f_{\varphi_n}^{\{n\}-}(x_0;x) > 0$ при $x \in M_n$, $x \neq 0$, существует число $\alpha > 0$ такое, что $\varphi_i(x) \ge 0$, $i = 2,\ldots,n$, при $x \in (C - x_0) \bigcap \alpha B$. Тогда $x_0 \in C$ является точкой строгого слабого локального минимума функции f на множестве C.

Рассмотрим минимизации функции $f_0(x)$ на множестве $G = \{x \in C : f_j(x) \le 0,\ j = 1,2,\ldots,k\}$, где $f_j : X \to R$, $j = 0,1,\ldots,k$, $C \subset X$.

Следствие 5. Пусть $f(x) = \max\{f_0(x) - f_0(x_0),\ f_1(x), \ldots,\ f_k(x)\}$, $x_0 \in G$, функции f_j, $j = 0,1,\ldots,k$, удовлетворяют $(1, \beta_i, \nu_i, \delta, o_i(\beta_i))$ локально липшицеву условию с постоянной L_i в точке x_0, где $i = 1,\ldots,n$ и

$\bigcup_{i=1}^{n}\{x\in T_s(x_0;C): f^{\{\beta_i\}-}(x_0;x)>0\}=T_s(x_0;C)\setminus\{0\}$. Тогда x_0 является точкой строгого слабого локального минимума функции f_0 на множестве $G=\{x\in C: f_j(x)\le 0,\ j=1,2,\dots,k\}$.

Доказательство. Из леммы 1.1[5] имеем, что функция $f(x)$ удовлетворяют $(1,\beta_i,\nu_i,\delta,o_i(\beta_i))$ локально липшицеву условию с постоянной L_i в точке x_0, где $i=1,\dots,n$. Тогда из теоремы 1 имеем, что x_0 является точкой строгого локального минимума функции $f(x)$ на C_τ при $\tau\in A$, т.е. существует $\delta_\tau>0$ такое, что $f(x)>f(x_0)$ при $x\in C\bigcap(x_0+\delta_\tau B\bigcap E_\tau),\ x\ne x_0$. Поэтому

$$\max\{f_0(x)-f_0(x_0),\ f_1(x),\dots,f_k(x)\}>0$$

при $x\in C\bigcap\{x_0+\delta_\tau B\bigcap E_\tau\},\ x\ne x_0$. Отсюда имеем, что $f_0(x)-f_0(x_0)>0$ при $x\in G\bigcap(x_0+\delta_\tau B\bigcap E_\tau),\ x\ne x_0$ и $\tau\in A$. Следствие доказано.

Отметим, что если X и Y-банаховы пространства, функции $f_j: X\to R,\ j=0,1,\dots,k$, и $F: X\to Y$ удовлетворяют $\varphi_j-(1,\beta,\nu,\delta,o_i(\beta))$ локально липшицеву условию с постоянной L_j в точке x_0, где $j=0,1,\dots,k,k+1$, то

$$L(x,\lambda_1,\dots,\lambda_k,y^*)=f_0(x)+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j f_j(x)+\left\langle y^*,F(x)\right\rangle,\ \ \lambda_j\in R,\ y^*\in Y^*,$$

удовлетворяет $\varphi_0+\left\langle y^*,\varphi_{k+1}\right\rangle+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\varphi_j-(1,\beta,\nu,\delta,o(\beta))$ локально липшицеву условию с постоянной

$L_0+\|y^*\|L_{k+1}+\sum_{j=1}^{k}|\lambda_j|L_j$ в точке x_0, где $o(t)=o_0(t)+\sum_{j=1}^{k}|\lambda_j|o_j(t)+\|y^*\|o_{k+1}(t)$.

Рассмотрим минимизации функции $f_0(x)$ на множестве $P=\{x\in C: f_j(x)\le 0,\ j=1,2,\dots,k,\ F(x)=0\}$, где $f_j: X\to R,\ j=0,1,\dots,k$, $F: X\to Y$, Y-банахово пространство. Если $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in R$ и $y^*\in Y^*$, то положим

$$L(x,\lambda_1,\dots,\lambda_k,y^*)=f_0(x)+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j f_j(x)+\left\langle y^*,F(x)\right\rangle.$$

Следствие 6. Пусть $x_0\in P$, существуют $\lambda_1\ge 0,\dots,\lambda_k\ge 0$, $y^*\in Y^*$, где $\lambda_j f_j(x_0)=0,\ j=1,\dots,k,$ такие, что в точке x_0 при $f(x)=L(x,\lambda_1,\dots,\lambda_k,y^*)$ выполняется условие теоремы 1, т.е. пусть $C\subset X,\ x_0\in P$, функция f удовлетворяет $\varphi_i-(1,\beta_i,\nu_i,\delta,o_i(\beta_i))$ локально липшицеву условию с постоянной L_i в точке x_0, существует число $\alpha > 0$ такое, что $\varphi_i(x) \ge 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, при $x \in (C - x_0) \bigcap \alpha B$ и

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{x \in T_s(x_0;C) : f_{\varphi_i}^{\{\beta_i\}-}(x_0;x) > 0\} = T_s(x_0;C) \setminus \{0\}.$$

Тогда x_0 является точкой строгого слабого локального минимума функции f_0 на множестве P.

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает, что x_0 является точкой строгого слабого локального минимума функции $f(x) = L(x,\lambda_1,\ldots,\lambda_k,y^*)$ на множестве C, т.е. существует $\delta_\tau > 0$, $\tau \in A$, такое, что

$$L(x,\lambda_1,\ldots,\lambda_k,y^*) > L(x_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_k,y^*)$$

при $x \in C \bigcap (x_0 + \delta_\tau B \bigcap E_\tau)$, $x \ne x_0$.

Поэтому

$$f_0(x) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j(x) + \left\langle y^*, F(x) \right\rangle > f_0(x_0)$$

при $x \in C \bigcap (x_0 + \delta_\tau B \bigcap E_\tau)$, $x \ne x_0$. Отсюда следует, что $f_0(x) > f_0(x_0)$ при $x \in P \bigcap (x_0 + \delta_\tau B \bigcap E_\tau)$, $x \ne x_0$, $\tau \in A$. Следствие доказано.

Отметим, что если $x_0 \in \operatorname{int} C$,

$$\varphi(x) = \left\langle f_0'(x_0) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f'(x_0) + F'^*(x_0) y^*, x \right\rangle$$

и существует число $\alpha > 0$ такое, что $\varphi(x) \ge 0$ при $x \in (C - x_0) \bigcap \alpha B$, то $f_0'(x_0) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f'(x_0) + F'^*(x_0) y^* = 0$. Поэтому имеем, что $L_x(x_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_k,y^*) = 0$.

Положим $C_\tau = C \bigcap (x_0 + \delta B \bigcap E_\tau)$ и

$\widetilde{K}_\tau(x_0) = \operatorname{cl} \operatorname{con}(C_\tau - x_0) = \operatorname{cl}\{\lambda x : \lambda > 0,\ x \in C_\tau - x_0\}$, где $\delta > 0$, $x_0 \in C$, $\tau \in A$.

Можно рассмотреть и следующую обобщения теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $K_i^\tau(x_0)$ замкнутые выпуклые конусы при $i = 1,\ldots,n_\tau$ и $\widetilde{K}_\tau(x_0) = \bigcup_{i=1}^{n_\tau} K_i^\tau$ при $\tau \in A$, $\varphi_i^\tau : K_i^\tau \to R$ функции, где $\varphi_i^\tau(0) = 0$, $i = 1,\ldots,n_\tau$, функция f удовлетворяет $\varphi_i^\tau - (1,\beta_i^\tau,\nu_i^\tau,\delta,o_i^\tau(\beta_i^\tau))$ локально липшицеву условию с постотоянной L_i^τ в точке x_0 относи-тельно конуса K_i^τ, существует число $\alpha > 0$ такое, что $\varphi_i^\tau(x) \ge 0$ при $x \in K_i^\tau \bigcap \alpha B$ и $f_{\varphi_i^\tau}^{\{\beta_i^\tau\}-}(x_0;x) > 0$ при $x \in K_i^\tau$, $x \ne 0$, $i = 1,2,\ldots,n_\tau$ и $\tau \in A$. Тогда $x_0 \in C$ является точкой строгого слабого локального минимума функции f на множестве C.

Доказательство. Допустим противное. Тогда существует индекс $\tau \in A$ такой, что x_0 не является точкой строгого локального минимума функции f на множество C_τ. Поэтому для любого $\delta_k > 0$ найдется $y_k \neq 0$ такое, что $x_0 + y_k \in C_\tau$, $f(x_0 + y_k) \leq f(x_0)$ и $\|y_k\| \leq \delta_k$. Тогда существует конус K_m^τ, где $1 \leq m \leq n_\tau$, и для любого $\delta_k > 0$ найдется $y_k \in K_m^\tau$, $y_k \neq 0$, $\|y_k\| \leq \delta_k$ такое, что $f(x_0 + y_k) \leq f(x_0)$. Положим $\alpha_k = \|y_k\|$, $x_k = \dfrac{y_k}{\|y_k\|}$. Не умаляя общности можно считать, что $x_k \to x$, $x \neq 0$. Если $\alpha_k \downarrow 0$, то имеем, что $x \in K_m^\tau$. По условию $f_{\varphi_m^\tau}^{\{\beta_m^\tau\}-}(x_0; x) > 0$ при $x \in K_m^\tau$, $x \neq 0$.

Если $\delta_k < \min\{\frac{\delta}{2}, \alpha\}$, то по условию имеем, что

$$f(x_0 + \alpha_k x) - \varphi_m^\tau(\alpha_k x) - f(x_0) \leq f(x_0 + \alpha_k x) -$$
$$-\varphi_m^\tau(\alpha_k x) - f(x_0 + \alpha_k x_k) + \varphi_m^\tau(\alpha_k x_k) \leq$$
$$\leq \left| f(x_0 + \alpha_k x + (\alpha_k x_k - \alpha_k x)) + \varphi_m^\tau(\alpha_k x) - f(x_0 + \alpha_k x) - \varphi_m^\tau(\alpha_k x_k) \right| \leq$$
$$\leq L_m^\tau \alpha_k^{\nu_m^\tau} \|x_k - x\|^{\nu_m^\tau} (\|\alpha_k x\|^{\beta_m^\tau - \nu_m^\tau} + \|x_k - x\|^{\beta_m^\tau - \nu_m^\tau} \cdot \alpha_k^{\beta_m^\tau - \nu_m^\tau}) + o_m^\tau(\alpha_k^{\beta_m^\tau} \|x\|^{\beta_m^\tau}).$$

Поэтому

$$f_{\varphi_m^\tau}^{\{\beta_m^\tau\}-}(x_0; x) \leq \underline{\lim}_{k \to \infty} \frac{f(x_0 + \alpha_k x) - \varphi_m^\tau(\alpha_k x) - f(x)}{\alpha_k^{\beta_m^\tau}} \leq$$

$$\leq \underline{\lim}_{k \to \infty} (L_m^\tau \|x_k - x\|^{\nu_m^\tau} (\|x\|^{\beta_m^\tau - \nu_m^\tau} + \|x_k - x\|^{\beta_m^\tau - \nu_m^\tau}) + \frac{o_m^\tau(\alpha_k^{\beta_m^\tau} \|x\|^{\beta_m^\tau})}{\alpha_k^{\beta_m^\tau}}) = 0,$$

т.е. $f_{\varphi_m^\tau}^{\{\beta_m^\tau\}-}(x_0; x) \leq 0$. Так как $x \in K_m^\tau$, $x \neq 0$, то получим противоречие. Теорема доказана.

Пусть X банахово пространство, $C \subset X$, $f: X \to R$. Положим

$$f^{(n)}(x_0; x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t^n} (f(x_0 + tx) - f(x_0) - t f'(x_0; x) - \ldots - t^{n-1} f^{(n-1)}(x_0; x)),$$

$$\varphi_i(x) = f'(x_0; x) + \ldots + f^{(i-1)}(x_0; x).$$

Отметим что, запись $f^{(n)}(x_0; x)$ означает, что $f^{(n)}(x_0; x)$ существует и конечна, а выражение $n!.f^{(n)}(x_0; x)$ являются производной n-го порядка f в точке x_0 по направлению x.

Теорема 3. Пусть существуют конечная положительно однородная степени $i-\nu_i$ функция $\psi_i : X \to R,\ (i=\overline{2,n},\ 0<\nu_i \le i)$ и $o(t): R_+ \to R_+$, где $\frac{o(t)}{t} \to 0$ при $t \downarrow 0$, числа $\delta>0$ и $L_j>0,\ j=\overline{1,n}$ такие, что

$$|f(x_0+x+y)-f(x_0+x)| \le L_1\|y\|+o(\|x\|),$$

$$|f(x_0+x+y)-f(x_0+x)-\varphi_i(x+y)+\varphi_i(x)| \le L_i\|y\|^{\nu_i}(\psi_i(x)+\|y\|^{i-\nu_i})+o(\|x\|^i)$$

при $x,y\in X,\ \|x\|\le\delta,\ \|y\|\le\delta,\ 2\le i\le n$ и пусть

$$M_m=\{x\in M_{m-1}: f^{(m-1)}(x_0;x)\le 0\}, \text{ где } m=2,\dots,n,\ M_1=T_s(x_0;C)$$

и $f^{(n)}(x_0;x)>0$ при $x\in M_n,\ \|x\|=1$ и существует число $\alpha>0$ такое, что $\varphi_m(x)\ge 0,\ m=2,\dots,n$, при $x\in(C-x_0)\bigcap\alpha B$. Тогда $x_0\in C$ является точкой строгого слабого локального минимума функции f на C.

Доказательство. Допустим противное. Тогда существует индекс $\tau_0\in A$ такой, что x_0 не является точкой строгого локального минимума функции f на множестве C_{τ_0}. Поэтому для любого $\delta_k>0$ найдется $y_k\ne 0$ такое, что $x_0+y_k\in C_{\tau_0}$, $f(x_0+y_k)\le f(x_0)$ и $\|y_k\|\le\delta_k$. Положим $\alpha_k=\|y_k\|$, $x_k=\frac{y_k}{\|y_k\|}$.

Не умаляя общности можно считать, что $x_k\to x$, где $\|x\|=1$. Если $\alpha_k\downarrow 0$, то имеем, что $x\in T_s(x_0;C)$.

Обозначим $S_i=\{x\in M_i: f^{(i)}(x_0;x)>0\}$, $i=\overline{1,n}$. Так как

$$M_n=\{x\in T_s(x_0;C): f'(x_0;x)\le 0,\ f^{(2)}(x_0;x)\le 0,\dots,f^{(n-1)}(x_0;x)\le 0\},$$

то имеем, что $x\in\bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Тогда существует m, где $1\le m\le n$, что $x\in S_m$.

Пусть $m=1$. Ясно, что $f(x_0+\alpha_k x)-f(x_0)\le f(x_0+\alpha_k x)-f(x_0+\alpha_k x_k)$.

Если $\delta_k<\frac{\delta}{2}$, то по условию $f(x_0+\alpha_k x)-f(x_0)\le L_1\alpha_k\|x_k-x\|+o(\alpha_k\|x\|)$.

Поэтому

$$f'(x_0;x)=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_k x)-f(x_0)}{\alpha_k}\le\lim_{k\to\infty}(L_1\cdot\|x_k-x\|+\frac{o(\alpha_k\|x\|)}{\alpha_k})=0.$$

Отсюда следует, что $x\notin S_1$. Получим противоречие.

Пусть $m\ge 2$ и $\delta_k<\min\{\frac{\delta}{2},\alpha\}$. Так как

$$\varphi_m(x)=f'(x_0;x)+\dots+f^{(m-1)}(x_0;x),$$

то по условию имеем, что

$$f(x_0+\alpha_k x)-\varphi_m(\alpha_k x)-f(x_0)\le f(x_0+\alpha_k x)-$$
$$-f(x_0+\alpha_k x_k)+\varphi_m(\alpha_k x_k)-\varphi_m(\alpha_k x)\le$$
$$\le\left|f(x_0+\alpha_k x+(\alpha_k x_k-\alpha_k x))-f(x_0+\alpha_k x)-\varphi_m(\alpha_k x_k)+\varphi_m(\alpha_k x)\right|\le$$
$$\le L_m\alpha_k^{\nu_m}\|x_k-x\|^{\nu_m}(\psi_m(\alpha_k x)+\|x_k-x\|^{m-\nu_m}\cdot\alpha_k^{m-\nu_m})+o(\alpha_k^m\|x\|^m).$$

Поэтому

$$f^{(m)}(x_0;x)=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_k x)-\varphi_m(\alpha_k x)-f(x_0)}{\alpha_k^m}\le$$
$$\le\lim_{k\to\infty}(L_m\|x_k-x\|^{\nu_m}(\psi_m(x)+\|x_k-x\|^{m-\nu_m})+\frac{o(\alpha_k^m\|x\|^m)}{\alpha_k^m})=0,$$

т.е. $f^{(m)}(x_0;x)\le 0$ и $x\in S_m$. Получим противоречие. Теорема доказана.

В теореме 3 можно положить $\psi_i(\|x\|)=\alpha_i\|x\|^{i-\nu_i}$, где $\alpha_i>0$.

Для простоты изложения рассмотрены достаточные условия второго порядка для экстремальных задач при ограничениях. Пусть $\varphi: X\to R,$ где $\varphi(0)=0$. Положим

$$f^{\{1\}-}(x_0;x)=\underline{\lim}_{t\downarrow 0}\frac{f(x_0+tx)-f(x_0)}{t},\qquad f_\varphi^{\{2\}-}(x_0;x)=$$
$$=\underline{\lim}_{t\downarrow 0}\frac{f(x_0+tx)-\varphi(tx)-f(x_0)}{t^2},$$

$M_1=\{x\in T_s(x_0;C): f^{\{1\}-}(x_0;x)>0\},\ M_2=\{x\in T_s(x_0;C): f^{\{1\}-}(x_0;x)\le 0\}.$

Теорема 4. Пусть существует конечная положительно однородная степени $2-\nu$ функция $\psi: X\to R,\ (0<\nu\le 2)$ и $o(t): R_+\to R_+,$ где $\frac{o(t)}{t}\to 0$ при $t\downarrow 0$, числа $\delta>0$, $L_1>0$ и $L_2>0$ такие, что

$$|f(x_0+x+y)-f(x_0+x)|\le L_1\|y\|+o(\|x\|)$$

при $x\in M_1,\ \|x\|\le\delta,\ y\in X,\ \|y\|\le\delta,\ x_0+x+y\in C,$

$$|f(x_0+x+y)-f(x_0+x)-\varphi(x+y)+\varphi(x)|\le L_2\|y\|^\nu(\psi(x)+\|y\|^{2-\nu})+o(\|x\|^2)$$

при $x\in M_2,\ \|x\|\le\delta,\ y\in X,\ \|y\|\le\delta,\ x_0+x+y\in C.$

Кроме того, $f_\varphi^{\{2\}-}(x_0;x)>0$ при $x\in M_2,\ \|x\|=1$ и существует число $\alpha>0$ такое, что $\varphi(x)\ge 0$ при $x\in(C-x_0)\bigcap\alpha B$. Тогда $x_0\in C$ является точкой строгого слабого локального минимума функции f на C.

Доказательство. Допустим противное. Тогда существует индекс $\tau_0\in A$ такой, что x_0 не является точкой строгого локального минимума функции f на множество C_{τ_0}. Поэтому для любого $\delta_k>0$ найдется $y_k\ne 0$ такое, что

$x_0 + y_k \in C_{\tau_0}$, $\|y_k\| \le \delta_k$ и $f(x_0 + y_k) \le f(x_0)$. Положим $t_k = \|y_k\|$, $x_k = \dfrac{y_k}{\|y_k\|}$.

Не умаляя общности можно считать, что $x_k \to x$. Если $t_k \downarrow 0$, то имеем, что $x \in T_s(x_0; C)$. Поэтому $x \in M_1 \cup M_2$. Также имеем, что

$$f(x_0 + t_k x) - f(x_0) \le f(x_0 + t_k x) - f(x_0 + t_k x_k).$$

Предположим, что $\delta_k < \dfrac{\delta}{2}$. Если $x \in M_1$, то по условию имеем, что

$f(x_0 + t_k x) - f(x_0) \le$

$\le L_1 t_k \|x_k - x\| + o(t_k \|x\|)$. Отсюда вытекает, что

$$f^{\{1\}-}(x_0; x) \le \varliminf_{k\to\infty} \frac{f(x_0 + t_k x) - f(x_0)}{t_k} \le \varliminf_{k\to\infty} (L_1 \cdot \|x_k - x\| + \frac{o(t_k\|x\|)}{t_k}) = 0.$$

Получим, что $f^{\{1\}-}(x_0; x) \le 0$ и $x \in M_1$. Получим противоречие. Если $x \in M_2$, то по условию имеем, что

$$f(x_0 + t_k x) - \varphi(t_k x) - f(x_0) \le f(x_0 + t_k x) - f(x_0 + t_k x_k) + \varphi(t_k x_k) - \varphi(t_k x) \le$$
$$\le |f(x_0 + t_k x + (t_k x_k - t_k x)) - f(x_0 + t_k x) - \varphi(t_k x_k) + \varphi(t_k x)| \le$$
$$\le L_2 t_k^{\nu} \|x_k - x\|^{\nu} (\psi(t_k x) + \|x_k - x\|^{2-\nu} \cdot t_k^{2-\nu}) + o(t_k^2 \|x\|^2)$$

при $\|y_k\| = \|t_k x_k\| \le \min\{\alpha; 0{,}5\delta\}$. Поэтому

$$f_{\varphi}^{\{2\}-}(x_0; x) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{f(x_0 + t_k x) - \varphi(t_k x) - f(x_0)}{t_k^2} \le$$

$$\varliminf_{k\to\infty} (L_2 \|x_k - x\|^{\nu} (\psi(x) + \|x_k - x\|^{2-\nu}) + \frac{o(t_k^2 \|x\|^2)}{t_k^2}) = 0.$$

Отсюда вытекает, что $f_{\varphi}^{\{2\}-}(x_0; x) \le 0$ и $x \in M_2$. Получим противоречие. Теорема доказана.

Отметим, что когда φ равна одной из функций $f'(x_0; x)$, $f^{\{1\}-}(x_0; x)$, $f^{\{1\}+}(x_0; x)$, то получим удобное достаточное условие второго порядка для задач минимизации при ограничениях, где $f^{\{1\}+}(x_0; x) = \varlimsup_{t\downarrow 0} \dfrac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t}$.

Рассмотрим минимизации функции $f_0(x)$ на множестве

$$G = \{x \in C : f_i(x) \le 0,\ i = 1,2,\ldots,n\},\ \text{где}\ f_i : X \to R,\ i \in I = \{0,1,\ldots,n\}.$$

Теорема 5. Пусть $C \subset X$, $x_0 \in G$, функция f_i удовлетворяют

$$\varphi_i - (1, \beta_i, \nu_i, \delta, o_i(\beta_i)) \ \text{ и } \ (1, \overline{\beta}_i, \overline{\nu}_i, \delta, \overline{o}_i(\overline{\beta}_i))$$

локально липшицевым условиям с постоянной L_i в точке x_0, где $\varphi_i(0)=0$, $\beta_i > \overline{\beta}_i > 0$, $i \in I$, $f_i(x_0)=0$ при $i=1,\dots,n$, существует число $\alpha > 0$ такое, что $\varphi_i(x) \ge 0,\ i \in I$, при $x \in (G-x_0)\bigcap \alpha B$, $\varphi_i(x)$ положительно однородная степени $\overline{\beta}_i$ функция при $i \in I$ и $\max\limits_{i\in I} f_{i\varphi_i}^{\{\beta_i\}-}(x_0;x) > 0$ при

$$x \in T_G(x_0) = \{x \in T_s(x_0;G) : \varphi_i(x) \le 0,\ i \in I\},\ x \ne 0.$$

Тогда x_0 является точкой строгого слабого локального минимума функции f_0 на множестве G.

Доказательство. Допустим противное. Тогда существует индекс $\tau_0 \in A$ такое, что x_0 не яв-ляется точкой строгого локального минимума функции f на множество $\{x \in C_{\tau_0} : f_j(x) \le 0,\ j=1,2,\dots,n\}$, где $C_{\tau_0} = C \bigcap (x_0 + \delta B \bigcap E_{\tau_0})$. Поэтому для любого $\delta_k > 0$ найдется $y_k \ne 0$ такое, что $x_0 + y_k \in C_{\tau_0}$, $\|y_k\| \le \delta_k$, $f_i(x_0+y_k) \le f_i(x_0) = 0$ при $i=1,\dots,n$ и $f_0(x_0+y_k) \le f_0(x_0)$. Положим $t_k = \|y_k\|$, $x_k = \dfrac{y_k}{\|y_k\|}$. Не умаляя общности можно считать, что $x_k \to x$, $x \ne 0$. Если $t_k \downarrow 0$, то имеем, что $x \in T_s(x_0;C)$ и $x \in T_s(x_0;G)$.

Так как $f_i(x_0+y_k) \le f_i(x_0) = 0$ при $i=1,\dots,n$ и $f_0(x_0+y_k) \le f_0(x_0)$, то имеем, что

$$f_i(x_0+t_kx) - \varphi_i(t_kx) - f_i(x_0) \le f_i(x_0+t_kx) - f_i(x_0+t_kx_k) + \varphi_i(t_kx_k) - \varphi_i(t_kx) \le$$
$$\le \left| f_i(x_0+t_kx+(t_kx_k-t_kx)) - f_i(x_0+t_kx) - \varphi_i(t_kx_k) + \varphi_i(t_kx) \right| \le$$
$$\le L_i t_k^{\nu_i} \|x_k - x\|^{\nu_i} (\|t_kx\|^{\beta_i-\nu_i} + \|x_k - x\|^{\beta_i-\nu_i} \cdot t_k^{\beta_i-\nu_i}) + o_i(t_k^{\beta_i}\|x\|^{\beta_i})$$

при $\|y_k\| = \|t_kx_k\| \le \min\{\alpha;\ 0{,}5\delta\}$ и $i \in I$. Отсюда вытекает, что

$$f_{i\varphi_i}^{\{\beta_i\}-}(x_0;x) \le \varliminf_{k\to\infty} \frac{f_i(x_0+t_kx) - \varphi_i(t_kx) - f_i(x_0)}{t_k^{\beta_i}} \le$$
$$\le \varliminf_{k\to\infty} (L_i \|x_k - x\|^{\nu_i} (\|x\|^{\beta_i-\nu_i} + \|x_k - x\|^{\beta_i-\nu_i}) + \frac{o_i(t_k^{\beta_i}\|x\|^{\beta_i})}{t_k^{\beta_i}}) = 0$$

при $i \in I$. Поэтому $\max\limits_{i\in I} f_{i\varphi_i}^{\{\beta_i\}-}(x_0;x) \le 0$.

Так как $\left| f_i(x_0+t_kx) - \varphi_i(t_kx) - f_i(x_0) \right| \le L_i t_k^{\beta_i} \|x\|^{\beta_i}$, то имеем, что

$$-f_i(x_0+t_kx) + \varphi_i(t_kx) + f_i(x_0) \le L_i t_k^{\beta_i} \|x\|^{\beta_i}$$

при $i \in I$ и $t_k < \delta$. Тогда получим, что

$$\varphi_i(t_k x) \le f_i(x_0 + t_k x) - f_i(x_0) + L_i t_k^{\beta_i} \|x\|^{\beta_i} \le$$

$$\le f_i(x_0 + t_k x) - f_i(x_0 + t_k x_k) + L_i t_k^{\beta_i} \|x\|^{\beta_i} \le$$

$$\le L_i t_k^{\bar{\nu}_i} \|x_k - x\|^{\bar{\nu}_i} (t_k^{\bar{\beta}_i - \bar{\nu}_i} \|x\|^{\bar{\beta}_i - \bar{\nu}_i} + \|x_k - x\|^{\bar{\beta}_i - \bar{\nu}_i} \cdot t_k^{\bar{\beta}_i - \bar{\nu}_i}) + \bar{o}_i(t_k^{\bar{\beta}_i} \|x\|^{\bar{\beta}_i}) + L_i t_k^{\beta_i} \|x\|^{\beta_i}$$

при $\|y_k\| = \|t_k x_k\| \le \min\{\alpha; 0{,}5\delta\}$ и $i \in I$. По условию $\varphi_i(x)$ положительно однородная функция степени $\bar{\beta}_i$, то отсюда получим, что $\varphi_i(x) \le 0$ при $i \in I$. Тогда получим, что $x \in T_G(x_0)$ и $\max\limits_{i \in I} f_{i\varphi_i}^{\{\beta_i\}-}(x_0; x) \le 0$, где $x \ne 0$. Получим противоречие. Теорема доказана.

Отметим, что в теореме 5 условию: существует число $\alpha > 0$ такое, что $\varphi_i(x) \ge 0,\ i \in I$, при $x \in (G - x_0) \cap \alpha B$, можно заменить с условием: существует число $\alpha > 0$ такое, что $\varphi_i(x) \ge 0,\ i \in I$, при $x \in (C - x_0) \cap \alpha B$.

Из доказательства теоремы 5 вытекает, что верно следующее следствие.

Следствие 7. Пусть $C \subset X,\ x_0 \in G$, функция f_i удовлетворяют $\varphi_i - (1, \beta_i, \nu_i, \delta, o_i(\beta_i))$ и $(1, \bar{\beta}_i, \bar{\nu}_i, \delta, \bar{o}_i(\bar{\beta}_i))$-локально липшицевым условиям с постоянной L_i в точке x_0, где $\varphi_i(0) = 0$, $\beta_i > \bar{\beta}_i > 0$, $i \in I$, $f_i(x_0) = 0$ при $i = 1, \dots, n$, существует число $\alpha > 0$ такое, что $\varphi_0(x) \ge 0$ при $x \in (G - x_0) \cap \alpha B$, $\varphi_i(x)$ положительно однородная степени $\bar{\beta}_i$ функция при $i \in I$ и $f_{0\varphi_0}^{\{\beta_0\}-}(x_0; x) > 0$ при $x \in T_G(x_0) = \{x \in T_s(x_0; G) : \varphi_i(x) \le 0, i \in I\}$, $x \ne 0$. Тогда x_0 является точкой строгого слабого локального минимума функции f_0 на множестве G.

Из доказательства теоремы 5 вытекает, что верно следующее следствие.

Следствие 8. Пусть $C \subset X,\ x_0 \in G$, функция f_0 удовлетворяет $\varphi_0 - (1, \beta_0, \nu_0, \delta, o(\beta_0))$ локально липшицеву условию с постоянной L_0 в точке x_0, где $\varphi_0(0) = 0$, функция f_i, $i \in I_1$, удовлетворяют $\varphi_i - (1, \beta_i, \nu_i, \delta, o_i(\beta_i))$ и $(1, \bar{\beta}_i, \bar{\nu}_i, \delta, \bar{o}_i(\bar{\beta}_i))$-локально липшицевым условиям с постоянной L_i в точке x_0, где $\varphi_i(0) = 0$, $\beta_i > \bar{\beta}_i > 0$, $i \in I_1 \subset I$, $f_i(x_0) = 0$ при $i = 1, \dots, n$, существует число $\alpha > 0$ такое, что $\varphi_0(x) \ge 0$ при $x \in (G - x_0) \cap \alpha B$ (или при $x \in (C - x_0) \cap \alpha B$), $\varphi_i(x)$ положительно однородная степени $\bar{\beta}_i$ функция при $i \in I_1$ и $f_{0\varphi_0}^{\{\beta_0\}-}(x_0; z) > 0$ при $z \in \{x \in T_s(x_0; C) : \varphi_i(x) \le 0, i \in I_1\}$, $z \ne 0$. Тогда x_0 является точкой строгого локального минимума функции f_0 на G.

Если C выпуклое множество, то $T(x_0;C)=\mathrm{cl}\bigcup\limits_{t>0}\frac{C-x_0}{t}$. Поэтому если $\varphi_i(x)\ge 0,\ i\in I$, при $x\in T(x_0;C)$, то имеем, что $\varphi_i(x)\ge 0,\ i\in I$, при $x\in(C-x_0)\bigcap\alpha B$ и

$$\{x\in T_s(x_0;C):\varphi_i(x)\le 0,\ i\in I\}=\{x\in T_s(x_0;C):\varphi_i(x)=0,\ i\in I\}.$$

Поэтому из теоремы 5 вытекает следующее следствие.

Следствие 9. Пусть $C\subset X$ выпуклое множество, $x_0\in G$, функция f_i удовлетворяют $\varphi_i-(1,\beta_i,\nu_i,\delta,o_i(\beta_i))$ и $(1,\overline{\beta}_i,\overline{\nu}_i,\delta,\overline{o}_i(\overline{\beta}_i))$ локально липшицевым условиям с постоянной L_i в точке x_0, где $\varphi_i(0)=0$, $\beta_i>\overline{\beta}_i>0$, $i\in I$, $f_i(x_0)=0$ при $i=1,\dots,n$, $\varphi_i(x)\ge 0,\ i\in I$, при $x\in T(x_0;C)$, $\varphi_i(x)$ положительно однородная степени $\overline{\beta}_i$ функция при $i\in I$ и $\max\limits_{i\in I} f_{i\varphi_i}^{\{\beta_i\}-}(x_0;z)>0$ при $z\in\{x\in T_s(x_0;C):\varphi_i(x)=0,\ i\in I\}$, $z\ne 0$. Тогда x_0 является точкой строгого слабого локального минимума функции f_0 на множестве G.

Рассмотрим минимизации функции $f_0(x)$ на множестве $P=\{x\in C:f_j(x)\le 0,\ j=1,2,\dots,n,\ F(x)=0\}$, где $f_j:X\to R,\ j\in I=\{0,1,\dots,n\}$, $F:X\to Y$, Y банахово пространство, $y^*\in Y^*$. Положим

$$I(x_0)=\{i\in\{1,2,\dots,n\}:f_i(x_0)=0\}\bigcup\{0\}$$ и

$$L(x,\lambda,y^*)=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j f_j(x)+\left\langle y^*,F(x)\right\rangle,\text{ где }\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n).$$

Теорема 6. Пусть $C\subset X$, $x_0\in P$, функции f_i и F удовлетворяют $\varphi_i-(1,\beta,\nu,\delta,o_i(\beta))$, $(1,\overline{\beta}_i,\overline{\nu}_i,\delta,\overline{o}_i(\overline{\beta}_i))$ и $S-(1,\beta,\nu,\delta,o(\beta))$, $(1,\overline{\beta}_{n+1},\overline{\nu}_{n+1},\delta,\overline{o}(\overline{\beta}_{n+1}))$ локально липшицевым условиям с постоянной L_i и L_{n+1} в точке x_0 соответственно, где $\varphi_i(0)=0$, $i\in I$, $S(0)=0$, $\beta>\overline{\beta}_i$ при $i\in I(x_0)$ и $\beta>\overline{\beta}_{n+1}$, существуют $\lambda_0\ge 0,\ \lambda_1\ge 0,\dots,\lambda_n\ge 0$, $y^*\in Y^*$, где $\lambda_i f_i(x_0)=0$ при $i=1,\dots,n$, и число $\alpha>0$ такое, что $\varphi(x)=\lambda_0\varphi_0(x)+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i(x)+\left\langle y^*,S(x)\right\rangle\ge 0$ при $x\in(C-x_0)\bigcap\alpha B$, $\varphi_i(x)$, $i\in I(x_0)$, и $S(x)$ положительно однородные степени $\overline{\beta}_i$ и $\overline{\beta}_{n+1}$ функции и отображение соответственно, $L_\varphi^{\{\beta\}-}(x_0,\lambda,y^*;x)>0$ при

$$x\in T_s(x_0)=\{x\in T_s(x_0;C):\varphi_i(x)\le 0,\ i\in I(x_0),\ S(x)=0\},\ x\ne 0.$$

Тогда x_0 является точкой строгого слабого локального минимума функции f_0 на множестве P.

Доказательство. Допустим противное. Тогда существует индекс $\tau_0 \in A$ такой, что x_0 не является точкой строгого локального минимума функции f на множество $P_{\tau_0} = \{x \in C_{\tau_0} : f_j(x) \le 0,\ j = 1,2,\dots,n,\ F(x) = 0\}$. Поэтому для любого $\delta_k > 0$ найдется $y_k \ne 0$, $y_k \in E_{\tau_0}$ такое, что $x_0 + y_k \in C_{\tau_0}$, $\|y_k\| \le \delta_k$, $f_i(x_0 + y_k) \le 0$ при $i = 1,\dots,n$, $F(x_0 + y_k) = F(x_0) = 0$ и $f_0(x_0 + y_k) \le f_0(x_0)$. Положим $t_k = \|y_k\|$, $x_k = \dfrac{y_k}{\|y_k\|}$. Не умаляя общности можно считать, что $x_k \to x$, $x \ne 0$. Если $t_k \downarrow 0$, то имеем, что $x \in T_s(x_0; C_{\tau_0})$ и $x \in T(x_0; P_{\tau_0})$.

Так как $f_i(x_0 + y_k) \le f_i(x_0) = 0$ при $i \in \{j \in \{1,2,\dots,n\} : f_j(x_0) = 0\}$, $\lambda_i f_i(x_0) = 0$ при $i = 1,\dots,n$, $F(x_0 + y_k) = F(x_0) = 0$ и $f_0(x_0 + y_k) \le f_0(x_0)$, то имеем, что $f(x_0 + y_k) \le f(x_0)$, где $f(x) = L(x, \lambda, y^*)$ и

$$f(x_0 + t_k x) - \varphi(t_k x) - f(x_0) \le f(x_0 + t_k x) - f(x_0 + t_k x_k) + \varphi(t_k x_k) - \varphi(t_k x) \le$$

$$\le \left| f(x_0 + t_k x + (t_k x_k - t_k x)) - f(x_0 + t_k x) - \varphi(t_k x_k) + \varphi(t_k x) \right| \le$$

$$\le M t_k^{\nu} \|x_k - x\|^{\nu} (\|t_k x\|^{\beta-\nu} + \|x_k - x\|^{\beta-\nu} \cdot t_k^{\beta-\nu}) + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i o_i(t_k^{\beta} \|x\|^{\beta}) + \|y^*\| o(t_k^{\beta} \|x\|^{\beta})$$

при $\|y_k\| = \|t_k x_k\| \le \min\{\alpha;\ 0{,}5\delta\}$, где $M = \lambda_0 L_0 + \|y^*\| L_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j L_j$. Отсюда вытекает, что

$$f_{\varphi}^{\{\beta\}-}(x_0; x) \le \varliminf_{k\to\infty} \frac{f(x_0 + t_k x) - \varphi(t_k x) - f(x_0)}{t_k^{\beta}} \le$$

$$\le \varliminf_{k\to\infty} \left(M \|x_k - x\|^{\nu} (\|x\|^{\beta-\nu} + \|x_k - x\|^{\beta-\nu}) + \frac{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i o_i(t_k^{\beta} \|x\|^{\beta}) + \|y^*\| o(t_k^{\beta} \|x\|^{\beta})}{t_k^{\beta}} \right) = 0.$$

Поэтому $f_{\varphi}^{\{\beta\}-}(x_0; x) \le 0$.

Так как $\left| f_i(x_0 + t_k x) - \varphi_i(t_k x) - f_i(x_0) \right| \le L_i t_k^{\beta} \|x\|^{\beta}$ при $t_k < \delta$, то имеем, что $-f_i(x_0 + t_k x) + \varphi_i(t_k x) + f_i(x_0) \le L_i t_k^{\beta} \|x\|^{\beta}$ при $i \in I(x_0)$. Тогда получим, что

$$\varphi_i(t_k x) \le f_i(x_0 + t_k x) - f_i(x_0) + L_i t_k^{\beta} \|x\|^{\beta} \le f_i(x_0 + t_k x) - f_i(x_0 + t_k x_k) + L_i t_k^{\beta} \|x\|^{\beta} \le$$

$$\le L_i t_k^{\bar\nu_i} \|x_k - x\|^{\bar\nu_i} (t_k^{\bar\beta_i - \bar\nu_i} \|x\|^{\bar\beta_i - \bar\nu_i} + \|x_k - x\|^{\bar\beta_i - \bar\nu_i} \cdot t_k^{\bar\beta_i - \bar\nu_i}) + \bar o_i(t_k^{\bar\beta_i} \|x\|^{\bar\beta_i}) + L_i t_k^{\beta} \|x\|^{\beta}$$

при $\|y_k\| = \|t_k x_k\| \le \min\{\alpha;\ 0{,}5\delta\}$ и $i \in I(x_0)$. По условию $\varphi_i(x)$ положительно однородная функция степени $\overline{\beta}_i$, то отсюда получим, что $\varphi_i(x) \le 0$ при $i \in I(x_0)$.

Так как $\|F(x_0 + t_k x) - S(t_k x) - F(x_0)\| \le L_{n+1} t_k^{\beta} \|x\|^{\beta}$ при $t_k < \delta$, то имеем, что

$$\|S(t_k x)\| \le \|F(x_0 + t_k x) - F(x_0)\| + L_{n+1} t_k^{\beta} \|x\|^{\beta} =$$

$$= \|F(x_0 + t_k x) - F(x_0 + t_k x_k)\| + L_{n+1} t_k^{\beta} \|x\|^{\beta} \le$$

$$\le L_{n+1} t_k^{\overline{\nu}_{n+1}} \|x_k - x\|^{\overline{\nu}_{n+1}} (t_k^{\overline{\beta}_{n+1} - \overline{\nu}_{n+1}} \|x\|^{\overline{\beta}_{n+1} - \overline{\nu}_{n+1}} +$$

$$+ \|x_k - x\|^{\overline{\beta}_{n+1} - \overline{\nu}_{n+1}} \cdot t_k^{\overline{\beta}_{n+1} - \overline{\nu}_{n+1}}) + \overline{o}(t_k^{\overline{\beta}_{n+1}} \|x\|^{\overline{\beta}_{n+1}}) + L_{n+1} t_k^{\beta} \|x\|^{\beta}$$

при $\|y_k\| = \|t_k x_k\| \le \min\{\alpha;\ 0{,}5\delta\}$. По условию $S(x)$ положительно однородное отображение степени $\overline{\beta}_{n+1}$, то отсюда получим, что $S(x) = 0$. Тогда получим, что $x \in T_s(x_0)$ и $f_{\varphi}^{\{\beta\}-}(x_0; x) \le 0$, где $x \ne 0$. Получим противоречие. Теорема доказана.

В теореме 6 условию-функция f_i и F удовлетворяют $\varphi_i - (1, \beta, \nu, \delta, o_i(\beta))$ и $S - (1, \beta, \nu, \delta, o(\beta))$ локально липшицевым условиям с постоянной L_i и L_{n+1} в точке x_0 соответственно, можно заменить условием: функция f_i и F удовлетворяют $\varphi_i - (1, \beta, \nu_i, \delta, o_i(\beta))$ и $S - (1, \beta, \nu_{n+1}, \delta, o(\beta))$ локально липшицевым условиям с постоянной L_i и L_{n+1} в точке x_0 соответственно.

Из доказательства теоремы 6 вытекает, что верно следующее следствие.

Следствие 10. Пусть $C \subset X$, $x_0 \in P$, функция f_i и F удовлетворяют $\varphi_i - (1, \beta, \nu, \delta, o_i(\beta))$ и $S - (1, \beta, \nu, \delta, o(\beta))$ локально липшицевым условиям с постоянными L_i и L_{n+1} в точке x_0 соответственно, где $\varphi_i(0) = 0$, $i \in I$, $S(0) = 0$, существуют $\lambda_0 \ge 0$, $\lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_n \ge 0$, $y^* \in Y^*$, где $\lambda_i f_i(x_0) = 0$ при $i = 1, \ldots, n$ и число $\alpha > 0$ такое, что

$$\varphi(x) = \lambda_0 \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x) + \left\langle y^*, S(x) \right\rangle \ge 0$$

при $x \in (P - x_0) \bigcap \alpha B$, $L_{\varphi}^{\{\beta\}-}(x_0, \lambda, y^*; x) > 0$ при $x \in T_s(x_0; P)$, $x \ne 0$. Тогда x_0 является точкой строгого слабого локального минимума функции f_0 на множестве P.

Из доказательства теоремы 6 вытекает следующее следствие.

Следствие 11. Пусть $C \subset X$, $x_0 \in P$, функции f_i и F удовлетворяют $\varphi_i - (1, \beta, \nu, \delta, o_i(\beta))$, $(1, \overline{\beta}_i, \overline{\nu}_i, \delta, \overline{o}(\overline{\beta}_i))$ и $S - (1, \beta, \nu, \delta, o(\beta))$,

$(1,\overline{\beta}_{n+1},\overline{\nu}_{n+1},\delta,\overline{o}(\overline{\beta}_{n+1}))$ локально липшицевым условиям с постоянными L_i и L_{n+1} в точке x_0, где $\varphi_i(0)=0$, $S(0)=0$, $\beta>\overline{\beta}_i$, при $i\in I(x_0)$ и $\beta>\overline{\beta}_{n+1}$, $\varphi_i(x)$, $i\in I(x_0)$, и $S(x)$ положительно однородные функции и отображение степени $\overline{\beta}_i$ соответственно и

$$T_P(x_0)=\{T_s(x_0;C):\varphi_i(x)\le 0,\, i\in I(x_0),\, S(x)=0\}=\{0\}.$$

Тогда x_0 является точкой строгого слабого локального минимума функции f_0 на множестве P.

Пусть $\varphi(x)=\lambda_0\varphi_0(x)+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i(x)+\left\langle y^*,S(x)\right\rangle\ge 0$ при $x\in T_s(x_0;C)$.

Если $\lambda_i f_i(x_0)=0$ при $i\in J=\{1,\ldots,n\}$, то имеем, что

$$\varphi(x)=\lambda_0\varphi_0(x)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i(x)+\left\langle y^*,S(x)\right\rangle\le 0 \text{ при } x\in T_P(x_0)=$$
$$=\{x\in T_s(x_0;C):\varphi_i(x)\le 0,\, i\in I(x_0),\, S(x)=0\}.$$

Тогда получим, что $\lambda_0\varphi_0(x)+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i(x)+\left\langle y^*,S(x)\right\rangle=0$ при $x\in T_P(x_0)$. Поэтому $\lambda_0\varphi_0(x)=0$, $\lambda_i\varphi_i(x)=0$ при $i\in J(x_0)=\{i\in J: f_i(x_0)=0\}$, $x\in T_P(x_0)$.

Следствие 12. Пусть $C\subset X$ выпуклое множество, $x_0\in P$, функции f_i и F удовлет-воряют $\varphi_i-(1,\beta,\nu,\delta,o_i(\beta))$, $(1,\overline{\beta}_i,\overline{\nu}_i,\delta,\overline{o}_i(\overline{\beta}_i))$ и $S-(1,\beta,\nu,\delta,o(\beta))$, $(1,\overline{\beta}_{n+1},\overline{\nu}_{n+1},\delta,\overline{o}(\overline{\beta}_{n+1}))$ локально липшицевым условиям с постоянными L_i и L_{n+1} в точке x_0, где $\varphi_i(0)=0$, $i\in I$, $S(0)=0$, $\beta>\overline{\beta}_i$ при $i\in I(x_0)$ и $\beta>\overline{\beta}_{n+1}$, существуют $\lambda_0\ge 0,\ \lambda_1\ge 0,\ldots,\lambda_n\ge 0$, $y^*\in Y^*$, где $\lambda_i f_i(x_0)=0$ при $i=1,\ldots,n$, и $\varphi(x)=\lambda_0\varphi_0(x)+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i(x)+\left\langle y^*,S(x)\right\rangle\ge 0$ при $x\in T(x_0;C)$, $\varphi_i(x)$, $i\in I(x_0)$, и $S(x)$ положительно однородные функции и отображение степени $\overline{\beta}_i$ и $\overline{\beta}_{n+1}$ соответственно, $L_{\varphi}^{\{\beta\}-}(x_0,\lambda,y^*;x)>0$ при $x\in\{x\in T_s(x_0;C):\varphi_i(x)\le 0,\ \lambda_i\varphi_i(x)=0 \text{ при } i\in J(x_0),\ S(x)=0\}$, $x\ne 0$. Тогда x_0 является точкой строгого слабого локального минимума функции f_0 на множестве P.

Положим $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $I=\{0,1,2,\ldots,n\}$, $I_1=\{0,1,2,\ldots,n,n+1\}$

$$L(x,\lambda,y^*)=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j f_j(x)+\left\langle y^*,F(x)\right\rangle,\quad \varphi_{(\lambda,y^*)}(x)=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j\varphi_j(x)+\left\langle y^*,S(x)\right\rangle,$$

$$E(k,\alpha)=\{(\lambda,y^*)\in R^{n+1}\times Y^*:\sum_{i=0}^{n}\lambda_i=1,\ \lambda_i\ge 0,\ i\in I,\ \|y^*\|\le$$
$$\le k,\ \varphi_{(\lambda,y^*)}(x)\ge 0\ \ при\ \ x\in(C-x_0)\bigcap\alpha B\}.$$

Теорема 7. Пусть $C\subset X,\ x_0\in P$, функции f_i и F удовлетворяют $\varphi_i-(1,\beta,\nu,\delta,o_i(\beta))$, $(1,\overline{\beta}_i,\overline{\nu}_i,\delta,\overline{o}_i(\overline{\beta}_i))$ и $S-(1,\beta,\nu,\delta,o(\beta))$, $(1,\overline{\beta}_{n+1},\overline{\nu}_{n+1},\delta,\overline{o}(\overline{\beta}_{n+1}))$ локально липшицевым условиям с пос-тоянной L_i и L_{n+1} в точке x_0 соответственно, где $\varphi_i(0)=0$, $i\in I$, $S(0)=0,\beta>\overline{\beta}_i$ при $i\in I_1$, $f_i(x_0)=0$ при $i=1,\ldots,n$ и существуют числа $\alpha>0$ и $k>0$ такие, что $E(k,\alpha)\ne\varnothing$, $\varphi_i(x)$, $i\in I$, и $S(x)$ положительно однородные функции и отображение степени $\overline{\beta}_i$ и $\overline{\beta}_{n+1}$ соответственно, $\sup\limits_{(\lambda,y^*)\in E(k,\alpha)} L^{\{\beta\}-}_{\varphi_{(\lambda,y^*)}}(x_0,\lambda,y^*;x)>0$ при

$$x\in T_P(x_0)=\{x\in T_S(x_0;C):\varphi_i(x)\le 0,\ i\in I,\ S(x)=0\},\ \ x\ne 0.$$

Тогда x_0 является точкой строгого слабого локального минимума функции f_0 на множестве P.

Доказательство. Допустим противное. Тогда существует индекс $\tau_0\in A$ такой, что x_0 не является точкой строгого локального минимума функции f_0 на множество $P_{\tau_0}=\left\{x\in C_{\tau_0}:f_j(x)\le 0,\ j=1,2,\ldots,n,\ F(x)=0\right\}$. Поэтому для любого $\delta_k>0$ найдется $y_k\ne 0$ такое, что $x_0+y_k\in C_{\tau_0}$, $\|y_k\|\le\delta_k$, $f_i(x_0+y_k)\le f_i(x_0)=0$ при $i=1,\ldots,n$, $F(x_0+y_k)=F(x_0)=0$ и $f_0(x_0+y_k)\le f_0(x_0)$. Положим $t_k=\|y_k\|$, $x_k=\dfrac{y_k}{\|y_k\|}$. Не умаляя общности можно считать, что $x_k\to x$, $x\ne 0$. Если $t_k\downarrow 0$, то имеем, что $x\in T(x_0;C_{\tau_0})$ и $x\in T_S(x_0;P_{\tau_0})$.

Так как $f_i(x_0+y_k)\le f_i(x_0)$ при $i=1,\ldots,n$, $F(x_0+y_k)=F(x_0)=0$ и $f_0(x_0+y_k)\le f_0(x_0)$, то имеем, что $L(x_0+y_k,\lambda,y^*)\le L(x_0,\lambda,y^*)$ при $(\lambda,y^*)\in E(k,\alpha)$. Положив $f_{(\lambda,y^*)}(x)=L(x,\lambda,y^*)$, где $(\lambda,y^*)\in E(k,\alpha)$, имеем, что

$$f_{(\lambda,y^*)}(x_0+t_k x)-\varphi_{(\lambda,y^*)}(t_k x)-f_{(\lambda,y^*)}(x_0)\le$$
$$\le f_{(\lambda,y^*)}(x_0+t_k x)-f_{(\lambda,y^*)}(x_0+t_k x_k)+\varphi_{(\lambda,y^*)}(t_k x_k)-$$
$$-\varphi_{(\lambda,y^*)}(t_k x)\le$$
$$\le\left|f_{(\lambda,y^*)}(x_0+t_k x+(t_k x_k-t_k x))-f_{(\lambda,y^*)}(x_0+t_k x)-\varphi_{(\lambda,y^*)}(t_k x_k)+\varphi_{(\lambda,y^*)}(t_k x)\right|\le$$
$$\le M t_k^{\nu}\|x_k-x\|^{\nu}(\|t_k x\|^{\beta-\nu}+\|x_k-x\|^{\beta-\nu}\cdot t_k^{\beta-\nu})+\sum_{i=0}^{n}\lambda_i o_i(t_k^{\beta}\|x\|^{\beta})+\|y^*\|o(t_k^{\beta}\|x\|^{\beta}))$$

при $\|y_k\|=\|t_k x_k\|\le\min\{\alpha;\,0{,}5\delta\}$, где $M=L_0+kL_{n+1}+\sum_{j=1}^{n}L_j$. Отсюда вытекает, что

$$L^{\{\beta\}-}_{\varphi_{(\lambda,y^*)}}(x_0,\lambda,y^*;x)\le\varliminf_{k\to\infty}\frac{L(x_0+t_k x,\lambda,y^*)-\varphi_{(\lambda,y^*)}(t_k x)-L(x_0,\lambda,y^*)}{t_k^{\beta}}\le$$
$$\le\varliminf_{k\to\infty}(M\|x_k-x\|^{\nu}(\|x\|^{\beta-\nu}+\|x_k-x\|^{\beta-\nu})+\frac{\sum_{i=0}^{n}\lambda_i o_i(t_k^{\beta}\|x\|^{\beta})+\|y^*\|o(t_k^{\beta}\|x\|^{\beta})}{t_k^{\beta}})=0.$$

Поэтому $L^{\{\beta\}-}_{\varphi_{(\lambda,y^*)}}(x_0,\lambda,y^*;x)\le 0$ при $(\lambda,y^*)\in E(k,\alpha)$. Тогда имеем, что $\sup\limits_{(\lambda,y^*)\in E(k,\alpha)}L^{\{\beta\}-}_{\varphi_{(\lambda,y^*)}}(x_0,\lambda,y^*;x)\le 0$.

Так как $|f_i(x_0+t_k x)-\varphi_i(t_k x)-f_i(x_0)|\le L_i t_k^{\beta}\|x\|^{\beta}$ при $t_k<\delta$, то имеем, что $-f_i(x_0+t_k x)+\varphi_i(t_k x)+f_i(x_0)\le L_i t_k^{\beta}\|x\|^{\beta}$ при $i\in I$. Тогда получим, что

$$\varphi_i(t_k x)\le f_i(x_0+t_k x)-f_i(x_0)+L_i t_k^{\beta}\|x\|^{\beta}\le f_i(x_0+t_k x)-f_i(x_0+t_k x_k)+L_i t_k^{\beta}\|x\|^{\beta}\le$$
$$\le L_i t_k^{\bar\nu_i}\|x_k-x\|^{\bar\nu_i}(t_k^{\bar\beta_i-\bar\nu_i}\|x\|^{\bar\beta_i-\bar\nu_i}+\|x_k-x\|^{\bar\beta_i-\bar\nu_i}\cdot t_k^{\bar\beta_i-\bar\nu_i})+\bar o_i(t_k^{\bar\beta_i}\|x\|^{\bar\beta_i})+L_i t_k^{\beta}\|x\|^{\beta}$$

при $\|y_k\|=\|t_k x_k\|\le\min\{\alpha;\,0{,}5\delta\}$ и $i\in I$. По условию $\varphi_i(x)$ положительно однородная функция степени $\bar\beta_i$, то отсюда получим, что $\varphi_i(x)\le 0$ при $i\in I$.

Так как $\|F(x_0+t_k x)-S(t_k x)-F(x_0)\|\le L_{n+1}t_k^{\beta}\|x\|^{\beta}$ при $t_k<\delta$, то имеем, что

$$\|S(t_k x)\|\le\|F(x_0+t_k x)-F(x_0)\|+L_{n+1}t_k^{\beta}\|x\|^{\beta}=$$
$$=\|F(x_0+t_k x)-F(x_0+t_k x_k)\|+L_{n+1}t_k^{\beta}\|x\|^{\beta}\le$$
$$\le L_{n+1}t_k^{\bar\nu_{n+1}}\|x_k-x\|^{\bar\nu_{n+1}}(t_k^{\bar\beta_{n+1}-\bar\nu_{n+1}}\|x\|^{\bar\beta_{n+1}-\bar\nu_{n+1}}+$$
$$+\|x_k-x\|^{\bar\beta_{n+1}-\bar\nu_{n+1}}\cdot t_k^{\bar\beta_{n+1}-\bar\nu_{n+1}})+\bar o(t_k^{\bar\beta_{n+1}}\|x\|^{\bar\beta_{n+1}})+L_{n+1}t_k^{\beta}\|x\|^{\beta}$$

при $\|y_k\| = \|t_k x_k\| \le \min\{\alpha; 0{,}5\delta\}$. По условию $S(x)$ положительно однородное отображение степени $\overline{\beta}_{n+1}$, то отсюда имеем, что $S(x)=0$. Тогда получим, что $x \in T_P(x_0)$ и $\sup\limits_{(\lambda,y^*)\in E(k,\alpha)} L^{\{\beta\}-}_{\varphi_{(\lambda,y^*)}}(x_0,\lambda,y^*;x) \le 0$.

Получим противоречие. Теорема доказана.

Положим

$$E_0(k,\alpha) = \{(\lambda, y^*) \in R^{n+1} \times Y^* : \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \ge 0,\ i \in I,$$
$$\|y^*\| \le k,\ \varphi_{(\lambda,y^*)}(x) \ge 0 \ \ при\ x \in (P - x_0) \bigcap \alpha B\},$$

где $P = \{x \in C : f_j(x) \le 0,\ j = 1,2,\dots,n,\ F(x) = 0\}$.

Из доказательства теоремы 7 вытекает следующее следствие.

Следствие 13. Пусть $C \subset X$, $x_0 \in P$, функции f_i и F удовлетворяют $\varphi_i - (1,\beta,\nu,\delta,o_i(\beta))$ и $S - (1,\beta,\nu,\delta,o(\beta))$ локально липшицевым условиям с постоянной L_i и L_{n+1} в точке x_0 соответ-ственно, где $\varphi_i(0)=0$, $i \in I$, $S(0)=0$, $f_i(x_0)=0$ при $i=1,\dots,n$, и существуют числа $\alpha>0$ и $k>0$ такие, что $E_0(k,\alpha) \ne \varnothing$ и $\sup\limits_{(\lambda,y^*)\in E_0(k,\alpha)} L^{\{\beta\}-}_{\varphi_{(\lambda,y^*)}}(x_0,\lambda,y^*;x) > 0$ при $x \in T_S(x_0;P)$, $x \ne 0$. Тогда x_0 является точкой строгого слабого локального минимума функции f_0 на множестве P.

Используя из леммы 2 [5] по теореме 7 имеем, что справедливо следующее следствие.

Следствие 14. Пусть $C \subset X$, $x_0 \in P$, производная $f_i'(z)$ в смысле Фреше существует при $z \in x_0 + 2\delta B$ и найдется $L_i > 0$ такое, что $\|f_i'(u) - f_i'(\upsilon)\| \le L_i \|u - \upsilon\|$ при $u,\upsilon \in x_0 + 2\delta B$, функция f_i удовлетворяют $(1,1,\overline{\nu},\delta,o_i(1))$ локально липшицевым условиям с постоянной L_i в точке x_0, где $i \in I$, и производная $F'(z)$ в смысле Фреше существует при $z \in x_0 + 2\delta B$ и найдется $L_{n+1} > 0$ такое, что $\|F'(u) - F'(\upsilon)\| \le L_{n+1}\|u-\upsilon\|$ при $u,\upsilon \in x_0 + 2\delta B$, F удовлетворяют $(1,1,\overline{\nu},\delta,o(1))$ локально липшицевым условиям с постоянной L_{n+1} в точке x_0, $f_i(x_0)=0$ при $i=1,\dots,n$, и существуют числа $\alpha>0$ и $k>0$ такие, что $E(k,\alpha)\ne\varnothing$, где $\varphi_i(x) = \langle f_i'(x_0), x\rangle$, $i \in I$, $S(x) = \langle F'(x_0), x\rangle$, и $\sup\limits_{(\lambda,y^*)\in E(k,\alpha)} L^{\{2\}-}_{\varphi_{(\lambda,y^*)}}(x_0,\lambda,y^*;x) > 0$ при

$$x \in T_P(x_0) = \{x \in T_s(x_0;C) : \varphi_i(x) \le 0,\ i \in I,\ S(x) = 0\},\ x \ne 0.$$

Тогда x_0 является точкой строгого слабого локального минимума функции f_0 на множестве P.

Отметим, что результаты настоящей статьи анонсированы в работе [4] автора.

Литература

1. Sadygow M.A. About sufficient conditions an extremum with constraints, Transactions of NAS of Azerbaijan, 2006, № 6, c.56-65.
2. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.:Наука, 1988, 280 с.
3. Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении, Москва, 2004, 167 с.
4. Садыгов М.А. Достаточные условия оптимальности высокого порядка, Материалы 7-ой конференции, посвященной актуальной проблемы физики, Ваку, 2013.
5. Садыгов М.А. Задачи на экстремум с ограничениями в метрическом пространстве. ДАН, 2013, том 452, №5, с.490-493.
6. Садыгов М.А. Исследование негладких оптимизационных задач, Баку, Элм, 2002, 125 с.
7. Садыгов М.А. Исследование субдифференциала первого и второго порядков негладких функций, Баку, Элм, 2007, 224 с.
8. Садыгов М.А. Экстремальные задачи с ограничением в метрическом пространстве, ДАН, 2012, том 447, № 6, с. 615-618.
9. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем, Баку, 1996,148 с.
10. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации, М.: Наука, 1986, 328с.
11. Третьяков А.А. Условия оптимальности p-го порядка типа Куна-Таккера для вырожденной задачи оптимизации с ограничениями-неравенствами общего вида. ДАН, 2010, том 434, № 5, с. 591-594.
12. Шеффер Х. Топологические векторные пространства, М: Мир, 1971, 359 с.

Lokal minimum üçün kafi şərtlər

M.A. Sadıqov

XÜLASƏ

İşdə nöqtədə $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta)$ local Lipşits funksiyalar sinfindən istifadə olunaraq Banax fəzasında məhdudiyyətli ekstremal məsələnin munimumu üçün yüksək tərtibli kafi şərt alınmışdır.

Açar sözlər: konus, kafi şərt, lokal Lipşis funksiya, lokal minimum, Banax fəzası.

Sufficient conditions for a local minima

M.A. Sadygov

ABSTRACT

In work using the class of point local Lipschitz functions $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta)$ - high order sufficient conditions are derived for the minimum of the extremal problem with constraints in the Banach space.

Keywords: cones, sufficient conditions, local Lipschitz functions, local minimum, Banach space.